INTRODUCCIÓN DE GRAFOS PLANARES Y COLOREO EN E.G.B. 3

Braicovich, Teresa
Universidad Nacional del Comahue.

1. Introducción

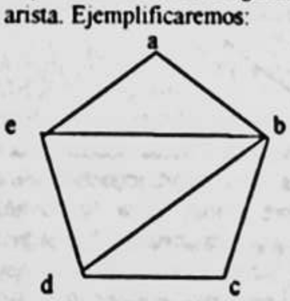
Siendo docente universitaria de matemática en primer año de carreras en las que la formación en esta disciplina es fundamental (distintas orientaciones de ingeniería y profesorados de matemática, de física y de química) noto, no sin preocupación, las serias dificultades que tienen una gran cantidad de alumnos para realizar un aprendizaje significativo, lo que obstaculiza la tarea docente respecto a la adquisición de los contenidos de los programas. Algunas de las dificultades observadas es lo difícil que les resulta proponer razonamientos propios, también es notorio que a veces no logran resolver problemas sencillos que pueden presentarse en la vida cotidiana y que están relacionados con la matemática. La teoría de Grafos es un tema avanzado a nivel universitario que permite realizar análisis y razonamientos muy interesantes y puede ser introducido en alumnos del Tercer Ciclo de la Educación General Básica (E.G.B. 3) pues no necesita contar con una base matemática importante.

En esta experiencia el tema grafos fue introducido en alumnos de séptimo grado mediante resolución de problemas, por ser esta una forma privilegiada para la construcción del conocimiento, problemas que no sean meras ejercitaciones rutinarias, sino que hagan que el alumno movilice sus conocimientos previos y tenga que engendrar nuevos para lograr resoluciones correctas.

El objetivo de este trabajo es analizar si la introducción de grafos hace que los alumnos desarrollen las capacidades de abstracción y de razonamiento matemático de tipo discreto, realicen representaciones y modelizaciones de situaciones que se les pueden presentar cotidianamente, y además si logran encontrar relación entre problemas de la vida real y la matemática.

Para poder desarrollar la experiencia realizada comenzaremos dando algunas definiciones:

Un grafo es un par ordenado $G = (V, A)$ donde $V \neq \emptyset$ es su conjunto de vértices y A es una familia de pares no ordenados de vértices, los elementos de A se llaman aristas. El número de aristas que inciden en un vértice es el grado del mismo, si es un número par se dice que el vértice es de grado par, en caso de ser impar se dirá vértice de grado impar. Dos vértices son adyacentes cuando son extremos de una misma arista. Ejemplificaremos:



Sea el G el grafo de la izquierda donde:

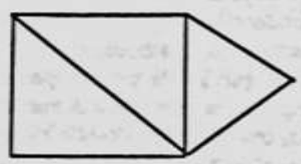
$V = \{a, b, c, d, e\}$

$A = \{(a,b), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (e,d), (d,c)\}$

Los vértices a, b y c son de grado par, los otros dos vértices son de grado impar. Por ejemplo el vértice b es adyacente a los otros cuatro vértices del grafo, los vértices a y c no son adyacentes pero si están conectados pues existe al menos un camino entre ellos. Cuando todos los vértices de un grafo están conectados entre si decimos que el grafo es conexo, caso contrario el grafo es disconexo.

A continuación daremos una breve reseña de los temas elegidos dentro de la teoría de grafos para realizar las experiencias con los alumnos:

1. Caminos Eulerianos: El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez?* Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:
   - *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino euleriano cerrado.*
   - *Un grafo conexo contiene un camino S_{ab} que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si a y b son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto.*
2. Grafos planares: son aquellos grafos que pueden dibujarse en el plano de manera que sus aristas sólo se corten en vértices del grafo. En los grafos planares conexos la diferencia entre la suma del número de vértices y de regiones y el número de aristas es igual a 2 (vértices + regiones – aristas = 2). Daremos a continuación un grafo planar conexo que tiene 5 vértices, 7 aristas y 4 regiones (debe contarse también la región exterior), podemos comprobar que se cumple la relación anterior.



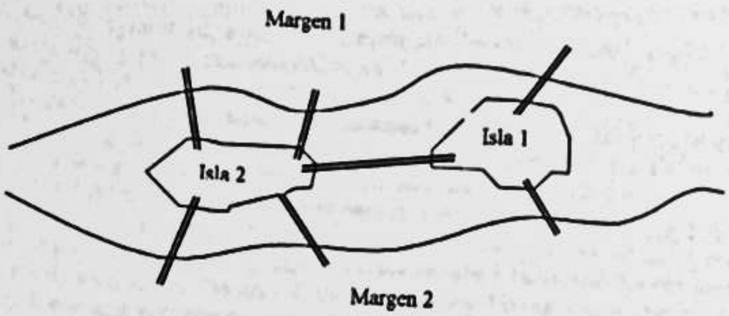
3. Coloreo de grafos: un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes, el número mínimo de colores con el que puede ser coloreado es denominado el número cromático del grafo. Es importante destacar que para colorear cualquier grafo planar es suficiente con cuatro colores.

2. Desarrollo de la experiencia

La experiencia se realizó en una escuela pública de gestión privada, en un séptimo grado con 31 alumnos, fueron 3 encuentros, todos de 80 minutos, es decir de 2 horas cátedra cada uno.

En el *primer encuentro* les conté que trabajaba en la universidad, mencionando en qué carreras y que además tenía un proyecto de investigación sobre grafos, tema "relativamente" nuevo en matemática, les llamó la atención que les dijera ***nuevo*** pues les comenté que la primera publicación sobre este tema apareció en 1736 (en San Petersburgo), siendo el autor de la misma Leonhard Euler. Allí se hace mención al problema del "Paseo del Señor Leonardo", justamente el que se utilizará para la introducción de la noción de grafos en la experiencia, enunciado a continuación:

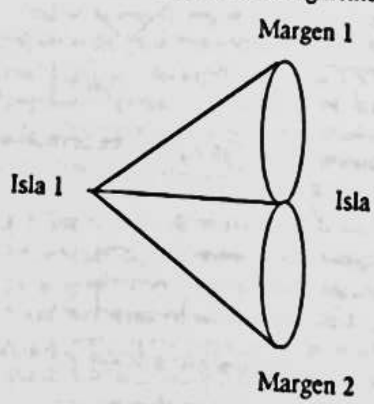
"La ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado), en Prusia Oriental, está situada en las márgenes del Río Pregel y sobre dos de sus islas, las distintas partes de la ciudad están conectadas entre si por 7 puentes, según el siguiente esquema:



Los domingos la gente que vivía en la ciudad salía de paseo, como es costumbre en las ciudades alemanas y entonces surgió la pregunta: *¿es posible efectuar un paseo a pie tal que utilizando exactamente una vez cada uno de los puentes se vuelva al punto inicial?*".

El enunciado del problema fue entregado a los alumnos para ir leyéndolo juntos, se hizo mención a la historia del mismo, lo que creo les resultó interesante, por ejemplo saber que esta ciudad existe y el porqué y cuándo del cambio de nombre de la misma. El grafo correspondiente fue hecho por mí en el pizarrón, haciéndoles ver que cada uno de los vértices representaba a los cuatro lugares en que estaba dividida la ciudad y luego al preguntarles que podía significar que se colocara una arista entre dos de ellos, rápidamente un buen número de chicos dijeron que esas líneas indicarían los puentes de la ciudad.

El grafo que representa la situación anterior es el siguiente:



Puede observarse que los 4 vértices son de grado impar por lo que no existe camino euleriano ni cerrado ni abierto.

A continuación se les explicaron los teoremas enunciados por este importante matemático, (los dos que se dan en la introducción) y comprobaron que no existe la posibilidad de hacer el paseo a pie ni aún llegando a un lugar distinto del que se parte pues los cuatro vértices tienen grado impar, no se mencionó la palabra *grado del vértice*, simplemente se decía *"el número de líneas del vértice"* atendiendo a que no es conveniente dar demasiadas definiciones, ya que esto suele frenar al alumno en su pensamiento, pues ellos piensan y elaboran ideas con su vocabulario. Cabe aclarar que ya he realizado experiencias anteriores donde los alumnos deben llegar solos a la conjetura que no existe tal camino, pero en este caso la idea es trabajar con otros temas de la teoría de grafos.

Es de notar que los alumnos en seguida mencionaron el conocido pasatiempo de las figuras unicursales (hacer una figura pasando por cada una de las aristas exactamente una vez sin levantar el lápiz), dieron 3 figuras distintas, dos con todos sus vértices pares y dijeron *"podemos empezar de cualquier lugar no hay problema"* y una que tenía dos vértices impares (figura 1 a continuación), en la que acotaron *"debemos empezar de cualquiera de los 2 impares"*. Luego pasó un alumno e hizo otra figura (figura 2 a continuación) rápidamente en el pizarrón, los restantes alumnos dijeron que él había hecho trampa pues esa no podía hacerse ya que tenía 4 vértices de grado impar, el alumno reconoció que en determinado momento había levantado la tiza para poder hacerla, en otro grupo surge una pregunta muy interesante: *"¿si hubiese habido 6 impares tenía que levantar la tiza 2 veces?"*, se dejó a los alumnos que analizaran y dijeron que seguramente sí. Acá puede observarse un pensamiento matemático sumamente adecuado, supieron interpretar perfectamente los teoremas dados por Euler e incluso los relacionaron con el número de veces que debía levantarse la tiza para realizar determinada figura.

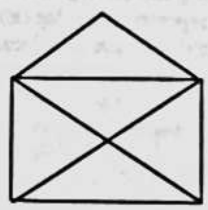
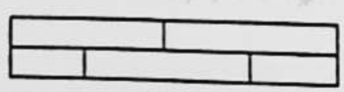


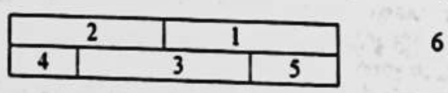
figura 1

figura 2

Como aún ellos solos no habían construido grafos a partir de determinada situación, se les dio el entretenimiento siguiente: *trazar una curva que intersecte una única vez, en un punto interior, cada uno de los 16 segmentos del siguiente dibujo*



Lo primero que haremos es numerar las regiones detrminadas por los segmentos:



Luego se construirá un grafo de 6 vértices donde las aristas entre los vértices indicaran la cantidad de segmentos en común que tienen, por ejemplo entre los vértices 2 y 3 existirá una arista, entre los vértices 2 y 5 ninguna y entre los vértices 1 y 6 deberán colocarse 2 aristas.

Rápidamente la mayoría se dio cuenta que los lugares eran los vértices pero algunos no pensaron en tomar el exterior como otro vértice. Se dejó que lo plantearan así, y luego en general se dieron cuenta solos que los segmentos del exterior no figuraban en el grafo, lo cual fue surgiendo de ellos al discutir entre pares. Una vez hallado el grafo, se dieron cuenta fácilmente que no podía hacerse la curva pedida pues existían más de 2 vértices de grado impar (los vértices 1, 2, 3 y 6 son de grado impar). Creo que les resultó interesante encontrar una relación tan directa entre pasatiempos y una estructura matemática como son los grafos.

Una vez que estuvo entendido qué era un grafo hice que en grupos pensaran qué situaciones podrían ser modelizadas mediante grafos ya que esta es una importante posibilidad que nos brinda la teoría en cuestión, algunas de las situaciones que ellos propusieron son transcriptas textualmente a continuación:

- *"los vértices casas y las aristas caminos entre ellas"*, *"ciudades y calles asfaltadas entre ellas"*, *"barrios y caminos entre barrios"*, *"bocacalles los puntos y calles las aristas"*.
- *"ciudades y trayectos de los aviones"*, *"islas del Caribe y cruceros, con cuántos cruceros puedo conocer todas las islas?"*.
- *"cada vértice un chico y cuando dos son amigos ponerles una línea"*.
- *"un vértice la selección argentina, unos vértices jugadores de fútbol y otros vértices clubes, los jugadores se unen segun donde juegan"*, *"el juego de 3 casas y los lugares de agua, luz y gas que no se puede poner un caño sobre otro"*, estos serían grafos bipartitos (son aquellos grafos en los cuales el conjunto de vértices puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos A y B tales que solo hay aristas entre A y B) y el último uno estrechamente ligado a los grafos planares y no planares.
- *"los puntos ciudades y las líneas recorridos de camiones con mercadería, como le conviene recorrer las ciudades"*, *"los vértices islas y las aristas recorridos de balsas para llevar cosas a los puntos y saber como es mejor ir de un lugar a otro"*, estos estarían relacionados con el conocido problema de grafos aun abierto llamado "problema del viajante".
- *"unir las provincias con sus capitales"*, esta alumna había dejado a propósito vértices aislados, es decir figuraban algunas provincias y no sus capitales y viceversa, lo que dio pie para mencionar que aún cuando haya vértices aislados es un grafo.
- *"ciudades con igual paralelo o igual meridiano que se unan mediante líneas"*, *"ciudades con igual huso horario"*, estos grafos dan pie a grafos disconexos, es decir de más de una componente. Ellos mismos dijeron que se formarían distintos "grupos".
- *"todas las provincias argentinas son vértices y a las que limitan las unimos con aristas"*, la alumna hizo el grafo y lo trajo para el segundo encuentro, esto en el tercer encuentro es utilizado para el problema de coloreo de grafos.

Como ya dijimos anteriormente que una de las posibilidades interesantes que nos brinda la teoría de grafos es la esquematización o modelización de situaciones de la vida real y teniendo en cuenta que las situaciones que propusieron fueron muy variadas y con mucho criterio a pesar de haber hecho solamente dos grafos, se interpreta que no les resulta difícil relacionar situaciones cotidianas con el nuevo tema.

En el *segundo encuentro* se define grafo planar, y regiones del mismo, se les pide que hagan distintos grafos planares, que hallen el numero de aristas, de regiones y de vértices y que traten de encontrar una relación entre estos tres valores, relación mencionada en la introducción de este trabajo (vértices + regiones – aristas = 2). Es de hacer notar que varios alumnos buscaron casos extremos, por ejemplo un grafo donde el número de aristas y de vértices coinciden además de ser bastante grande, con lo cual tienen solamente 2 regiones, este tipo de casos en general facilita el hallar conjeturas. Estuvieron gran parte de la clase buscando la relación pedida, finalmente en los distintos grupos podía observarse que habían hallado la relación pero escrita de diferente manera, y se preguntaban por qué quedaba siempre el 2 como constante, independientemente de cuales eran los números de regiones, vértices y aristas; incluso algunos de los chicos preguntaron si el 2 se debía a que el plano tiene 2 dimensiones.

Un representante de cada grupo pasó a escribir al pizarrón la relación que habían encontrado, ellos mismos se dieron cuenta que todas eran iguales. Como una de las formas de demostrar esta relación es utilizando el Principio de Inducción Matemática. Les hice analizar a partir del caso extremo ya mencionado donde quedaban determinadas dos regiones que fueran agregando solamente aristas, solamente vértices y también ambas cosas a la vez para que fueran analizando que sucedía. Esto lo hicieron con suficiente criterio como para hallar los posibles aumentos de cada uno de los elementos de la relación y analizar el hecho de que el número 2 se mantenía.

En el *tercer encuentro* se les enseñó a colorear grafos, diciéndoles que a vértices vecinos correspondían colores distintos y se les entregó una hoja con 10 grafos para que ellos colorearan; así lograron adquirir familiaridad con esta tarea, aclarándoles que debían pintar con el menor número de colores; este es el número cromático de un grafo pero se hizo que lo llamaran "*número de color*". Se controlaron los números que habían encontrado, se dieron cuenta fácilmente cómo encontrar el error cuando habían pintado con un color menos que el número cromático pero cuando tenían más colores de los que correspondían borraban absolutamente todo lo hecho y comenzaban nuevamente a pintar el grafo.

Luego se les entregó para que leyeran en forma individual el enunciado del problema titulado "*¿Cuántas jaulas harán falta?*", el que se da a continuación:

"*Parte de un zoológico debe trasladarse de una ciudad a otra y necesitan saber cuántas jaulas harán falta para el traslado de los animales, teniendo en cuenta que hay animales que no pueden estar juntos:*

- *El cocodrilo no puede estar con ciervo, antílope, mono ni elefante.*
- *El hipopótamo no puede estar con ciervo, elefante ni jirafa.*
- *La cebra no puede estar con rinoceronte, antílope ni cocodrilo.*
- *La jirafa no puede estar con el mono.*
- *El oso no puede estar junto al ciervo, al rinoceronte ni al cocodrilo*".

Luego de la lectura del problema empezaron a hacer el grafo sin que hiciera falta decirles que debían resolverlo utilizando grafos. Correctamente coincidieron en todos los grupos que los vértices eran los animales pero dudaron sobre qué indicarían las aristas, es decir en los grupos estaban divididas las opiniones; algunos querían unir los animales que podían estar juntos pero otros de entrada ya pensaron que deberían unir los que no podían compartir las jaulas, así podrían resolverlo utilizando coloreo. Una vez que el grafo estuvo listo enseguida comenzaron a colorear y todos lo hicieron en forma correcta pues dijeron que con 3 jaulas era suficiente, variaba en cuanto a cuales animales eran los que iban en cada jaula pero les pareció lógico que eso cambiara pues ya habían observado esto cuando pintaron los 10 grafos dados. Debido a que resolvieron correctamente el problema utilizando coloreo de grafos puede deducirse que solos pudieron descubrir una aplicación interesante del tema. Incluso un alumno dijo: *"ahora me doy cuenta cómo puede servir el coloreo de grafos"*, expresión que dejaba traslucir que les parecía un tema interesante y sobre todo aplicable.

Como con estos alumnos se había trabajado en grafos planares en el encuentro anterior, se les hizo que determinaran cuáles eran los grafos planares de los que tuvieron que colorear y que observaran el número de color de estos. Notaron que el número de color más grande que tenían era 4; les dije yo que efectivamente 4 colores son suficientes para colorear estos grafos, pues ellos no lograrían justificar esta conjetura que mantuvo por más de 120 años en vilo a los matemáticos más prestigiosos de la época. Se les contó la historia de este problema de coloreo diciéndoles que la primera vez que fue mencionado fue cuando un matemático muy conocido (De Morgan) escribió una carta a otro matemático (Hamilton) transmitiéndole una pregunta que le había hecho un alumno en cuanto a esta conjetura. Se les entregó un mapa a cada alumno (mapas de Europa, África y Argentina con división política) para que lo colorearan. En seguida en los grupos decían que solamente con 4 colores se podía pintar pues cualquier mapa puede representarse mediante un grafo planar. Una alumna que había hecho un grafo donde los vértices eran las provincias argentinas y las aristas indicaban que tienen límites en común dijo que cuando lo había hecho había intersectado aristas, pero que ahora frente al mapa, se daba cuenta que podría haber puesto las aristas de otra forma para que no se cortaran. Es importante destacar que cuando les dije que con 4 colores es suficiente y fuimos observando la hoja con los grafos que se le habían dado, uno de los alumnos dijo sin tener la hoja a mano que le parecía que uno de los grafos que era planar tenía color 5, en seguida él mismo se contestó diciendo *"es imposible, puse mal los colores o no me acuerdo bien"*; frente a la observación de una alumna que dijo: *"hay grafos que no son planares y tienen cuatro colores o menos"*, prácticamente en todos los grupos surgieron respuestas como las siguientes: *"no tiene nada que ver, solo dijo algo para los planares"*, *"si no es planar tendrá cualquier número de color"* o *"si se intersectan las aristas pueden tener cuatro, más de cuatro o menos de cuatro, depende del grafo"*. Estas últimas respuestas están indicando un razonamiento matemático importante; además los alumnos están trabajando utilizando correctamente el contraejemplo.

Luego de exactamente 10 días de haber finalizado la actividad se les hizo una serie de preguntas sobre qué les pareció el tema, si les gustó, si algo de lo visto les llamó la atención y por qué. En las respuestas se evidencia que el tema resultó interesante, novedoso y útil pues les pareció aplicable a distintas situaciones y con distintos finalidades.

3. Conclusiones

Considero que los objetivos que me había propuesto al realizar esta experiencia fueron satisfechos, la introducción de grafos resultó una herramienta de ayuda para el desarrollo del pensamiento matemático, no se pretendió que el alumno trabajara dentro de un marco axiomático riguroso como es común en la presentación de resultados de la matemática, pero si que pueda intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y justificar, sin exigencias de formalización extremas, y esto se logró. En cuanto al objetivo que apuntaba a la modelización utilizando grafos puede decirse lo mismo, pues además de dar en forma correcta los grafos correspondientes a los problemas planteados, dieron ejemplos muy interesantes de situaciones que podían representarse utilizándolos. Como ya se dijo también pudo notarse cierto nivel de abstracción cuando hacían ciertas generalizaciones en sus argumentaciones. En la lectura de las encuestas también se corrobora lo expresado anteriormente.

Además, aunque no había sido tomado como objetivo, el tema motivó a los alumnos; esto se pudo comprobar por la forma en que trabajaron en clase y por el hecho de que las tareas que se les pidieron las realizaron, a pesar de que es común que los niños tomen los deberes como una especie de castigo.

4. Bibliografía

- Chartrand, G. *Introductory Graph Theory* – Dover (1985)
- Kenney, M. and Hirsh, C. *Discrete Mathematics across the curriculum K 12* – Yearbook (1991)
- Wilson, R. *Introduction of Graph Theory* – Longman (1979)
- Chiappa, R. *Grafos* – Ministerio de Cultura y Educación – Secretaría de programación y Evaluación Educativa (1994).
- Toranzos, F. *Introducción a la Teoría de Grafos* – Organización de los Estados Americanos (1976).
- Ore, O. *Grafos y sus aplicaciones* – Mathematical Association of America (1981)
- *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. (1998).
- The New Jersey Mathematics Curriculum Framework. (1997)